

BÀI 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC GIÁO KHOA

1. Định nghĩa tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $a; +\infty$, $-\infty; b$ hoặc $-\infty; +\infty$. Đường thẳng $y = y_0$ là **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

2. Định nghĩa tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

B. MINH HỌA DẠNG TOÁN

DẠNG 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT VỀ TIỆM CẬN

Phương pháp giải: Dựa vào định nghĩa của đường tiệm cận

TCN: Đường thẳng $y = y_0$ là **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

TCD: Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x \neq \pm 1$, có

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.
- C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -2$ và $y = 2$.

Lời giải

Chọn D

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \Rightarrow y = -2$ là tiệm cận ngang; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

DẠNG 3. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN KHI BIẾT BBT HOẶC ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Phương pháp giải: Dựa vào BBT của hàm số $y = f(x)$ xác định các phương trình đường TCD, TCN, số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Chú ý:

- Ứng với điểm $x = x_0$ trong BBT thì ở dòng y phải ghi các kí hiệu $-\infty / +\infty$ (không phải là giá trị cụ thể) thì $x = x_0$ mới là đường TCD của đồ thị.
- Ứng với điểm $-\infty / +\infty$ trong BBT thì ở dòng y phải ghi các giá trị cụ thể y_0 (không phải là $-\infty / +\infty$) thì đường thẳng $y = y_0$ mới là đường TCN của đồ thị.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		+ 0 -	
y	$+\infty$ ↘ -1	$-\infty$ ↗ 2	↘ $-\infty$	

Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

Lời giải

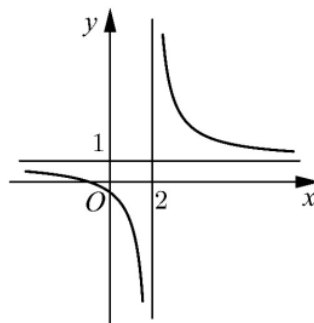
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ là đường tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm phương trình các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị, ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. Do đó, đồ thị có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

Theo đồ thị, ta cũng có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Do đó, đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Vậy đồ thị có tiệm cận đứng $x = 2$ tiệm cận ngang $y = 1$.

DẠNG 3. TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN KHI BIẾT CÔNG THỨC CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

B1: Tìm tập xác định D

B2:

- Tìm TCN: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (nếu ra một số y_0 cụ thể thì đường thẳng $y = y_0$ mới là đường TCN của đồ thị.)
- Tìm TCD: Xét x_0 là những điểm tại đó mẫu bằng 0, tính $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (nếu ra $-\infty / +\infty$ (không phải là giá trị cụ thể) thì $x = x_0$ mới là đường TCD của đồ thị.)

Ví dụ 5. Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau

a) $y = \frac{2x+5}{4x-1}$.

b) $y = \frac{2x^2+7x-9}{x^2+5x-6}$

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^+} y = +\infty$

Đồ thị đã cho có một tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{4}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$

Vậy tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{4}$ và tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$

Nhận xét:

Dùng casio

TCD: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y; \lim_{x \rightarrow x_0^-} y$ với $x_0^+ = x_0 + 10^{-8}; x_0^- = x_0 - 10^{-8}$

TCN: Bậc tử = Bậc mẫu $\Rightarrow TCN: y = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -6\}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \frac{11}{7}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \frac{11}{7} \Rightarrow x = 1$ không là tiệm cận đứng

Ta lại có: $\lim_{x \rightarrow 6^+} y = -\infty$

Đồ thị đã cho có một tiệm cận đứng là $x = -6$

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$

Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$

Vậy tiệm cận đứng là $x = -6$ và tiệm cận ngang là $y = 2$.

Nhận xét:

Dùng casio

TCD: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y; \lim_{x \rightarrow x_0^-} y$ với $x_0^+ = x_0 + 10^{-8}; x_0^- = x_0 - 10^{-8}$

$$\text{TCN: Bậc tử} = \text{Bậc mẫu} \Rightarrow \text{TCN: } y = \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

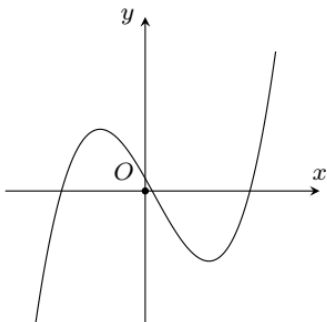
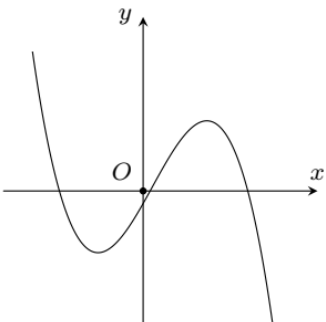
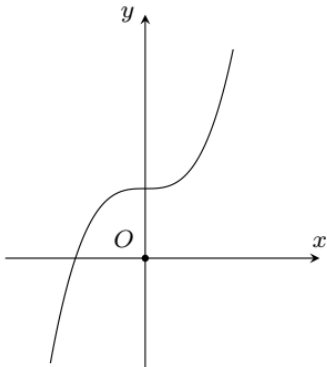
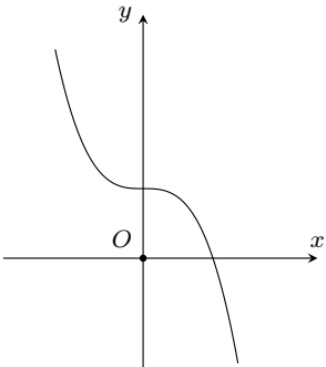
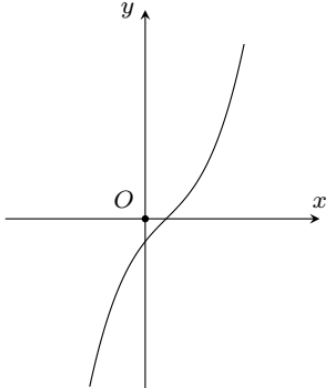
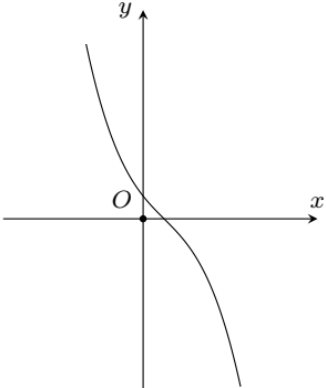
- Câu 1.** Đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{3x+2}$ có đường tiệm cận ngang là
- A. $x=3$. B. $x=1$. C. $y=3$. D. $y=1$.
- Câu 2.** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là
- A. $x=1$ và $y=-3$. B. $x=2$ và $y=1$.
C. $x=1$ và $y=2$. D. $x=-1$ và $y=2$.
- Câu 3.** Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là
- A. $x=-2$ và $y=-3$. B. $x=-2$ và $y=1$.
C. $x=-2$ và $y=3$. D. $x=2$ và $y=1$.
- Câu 4.** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 5.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ là
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 6.** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x+2}$ là
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 7.** Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$ là
- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Bài 5. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ (Phần 1)

I. KHẢO SÁT HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

1. Phương pháp

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$
- Giải phương trình $y' = 0$ (có 2 nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm kép hoặc vô nghiệm)
- Lập bảng biến thiên
- Các khoảng đơn điệu
- Cực trị
- Giới hạn tại vô cực
- Đồ thị

$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có 2 nghiệm		
Có nghiệm kép		
Vô nghiệm		

2. Ví dụ minh họa

***Ví dụ 1:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$

Lời giải

+) $D = \mathbb{R}$

+) $y' = 3x^2 + 6x$

+) $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$

+) BBT

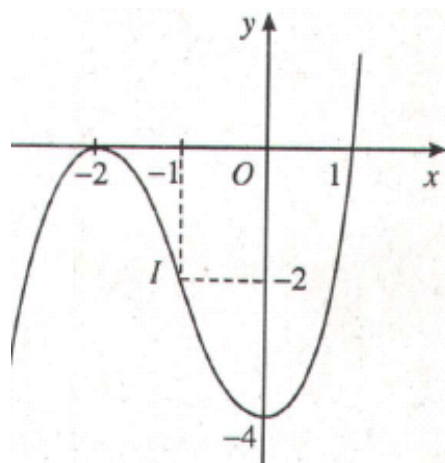
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

+) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

+) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2, y_{CD} = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -4$.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

+) Đồ thị



***Ví dụ 2:** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$

Lời giải

+) $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 - 2x + 1$

+) $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

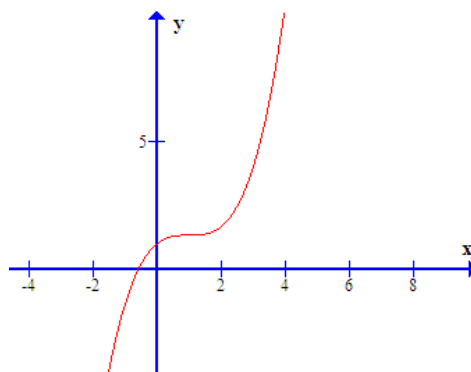
+) BBT

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$		$+\infty$

+) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

+) Đồ thị

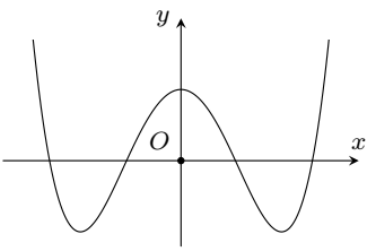
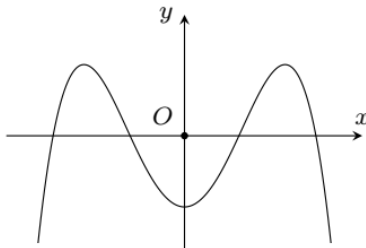
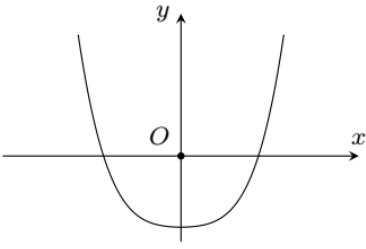
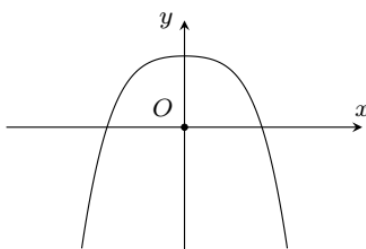


II. KHẢO SÁT HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

1. Phương pháp

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Tính $y' = 4ax^3 + 2bx$
- Giải phương trình $y' = 0$ (có 3 nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm duy nhất $x = 0$)

- Lập bảng biến thiên
- Các khoảng đơn điệu
- Cực trị
- Giới hạn tại vô cực
- Đồ thị

$y' = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Có 3 nghiệm		
Có 1 nghiệm		

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải

+) $D = \mathbb{R}$

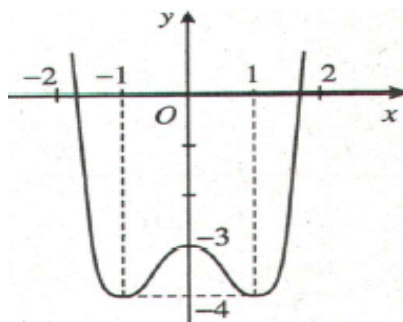
+) $y' = 4x^3 - 4x$

+) $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

+) BBT

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				-3			$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			-4				-4	

+) Đồ thị



+) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

+) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = -3$. Hàm số đạt tiểu đại tại $x = \pm 1$ và $y_{CT} = -4$.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$.

Lời giải

+) $D = \mathbb{R}$

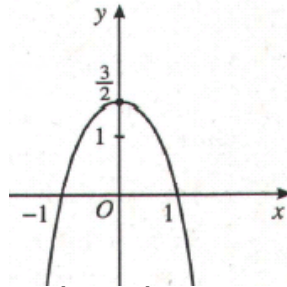
+) $y' = -2x^3 - 2x$

+) $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

+) BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

+) Đồ thị



+) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

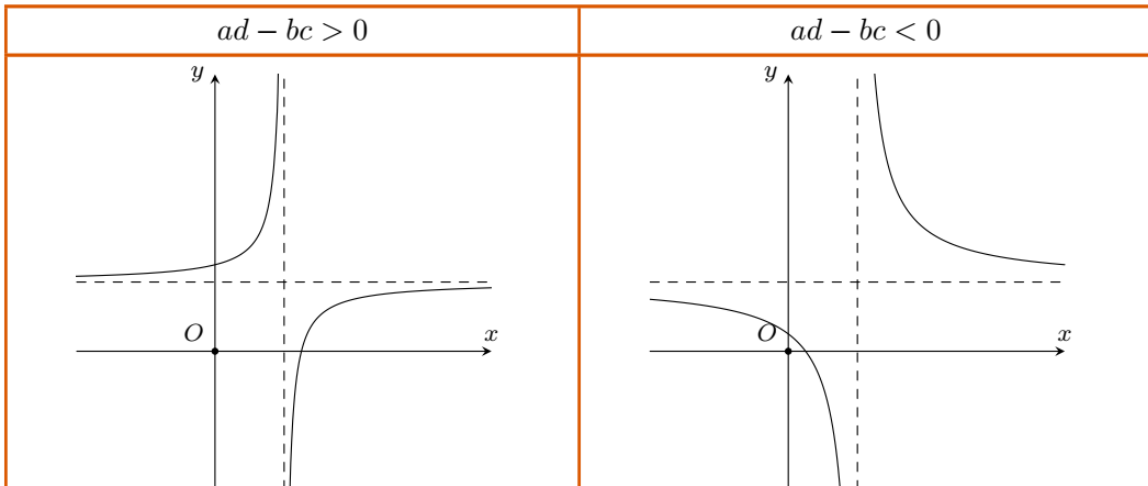
+) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = \frac{3}{2}$.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

III. KHẢO SÁT HÀM SỐ NHẤT BIẾN $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad \neq bc)$

1. Phương pháp

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- Tính $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
- Giải phương trình $y' = 0$ (luôn vô nghiệm)
- Lập bảng biến thiên
- Các khoảng đơn điệu
- Cực trị
- Giới hạn, TCĐ: $x = -\frac{d}{c}$, TCN: $y = \frac{a}{c}$.
- Đồ thị



2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$.

+) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

+) $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$

+) $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x+2)^2} = 0$ (vô nghiệm)

+) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

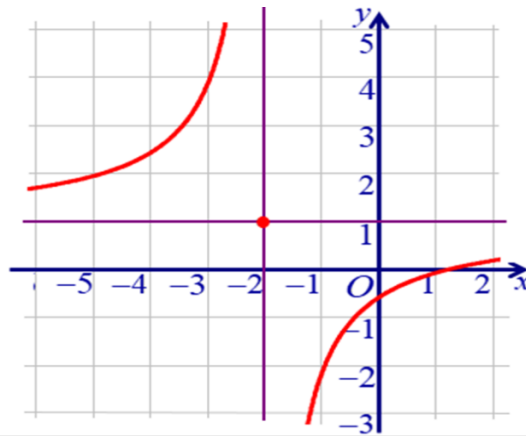
+) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

+) Hàm số không có cực trị.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1 \Rightarrow \text{TCN: } y = 1$

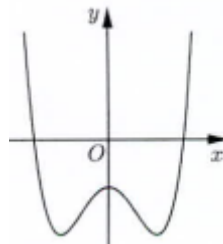
$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \Rightarrow \text{TCD: } x = -2$

+) Đồ thị



III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình dưới đây?



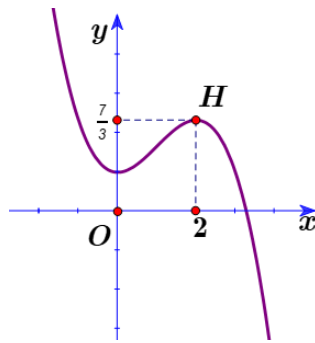
A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 2. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây?



A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1.$

B. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1.$

C. $y = x^4 - x^2 + 1.$

D. $y = -\frac{1}{3}x^3 - x + 1$

Câu 3. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	+	
y	$-\infty$	$+\infty$

A. $y = x^2 + 2x + 1.$

B. $y = x^4 + x^2 + 2.$

C. $y = x^3 + x^2 + 2x - 5.$

D. $y = \frac{x+1}{x+2}.$

Câu 4. Bảng biến thiên dưới đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		
y	-2	$+\infty$	-2

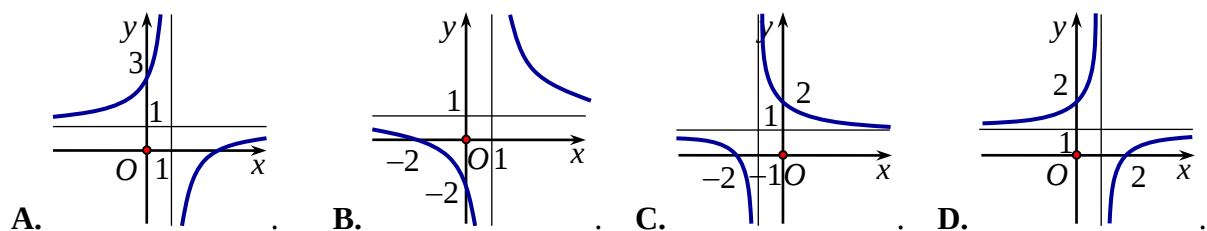
A. $y = \frac{-2x-3}{x+1}.$

B. $y = \frac{1-2x}{x+1}.$

C. $y = \frac{2x}{1+x}.$

D. $y = \frac{-2x}{x-1}.$

Câu 5. Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào dưới đây ?



Câu 6. Bảng biến thiên sau đây là của một trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	1	$-\infty$	$+\infty$

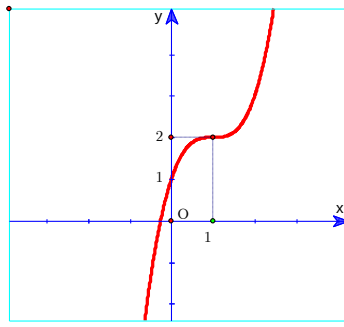
A. $y = -x^3 - 3x^2 - 3x.$

B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x.$

C. $y = x^3 + 3x^2 - 3x$

D. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

Câu 7. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.

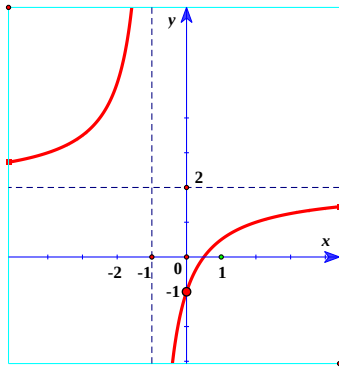
B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 8. Bảng biến thiên ở hình bên dưới là bảng biến thiên của một trong bốn hàm số ở các đáp án A, B, C, D. Hàm số đó là hàm số nào?

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



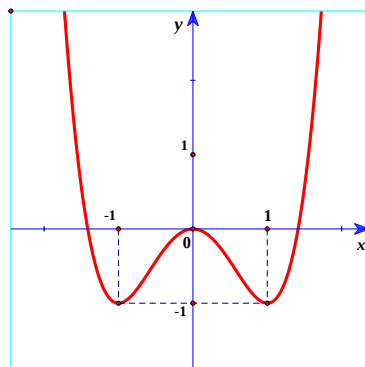
A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{1-2x}{x-1}$.

Câu 10. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



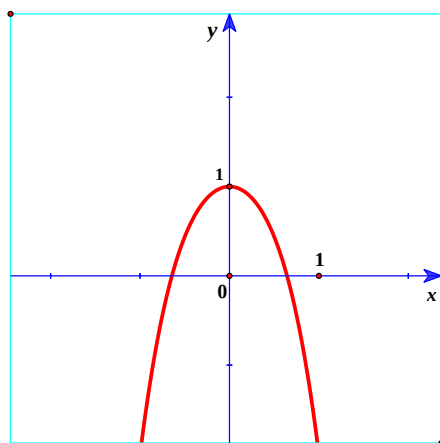
A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

B. $y = x^4 + 2x^2$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

D. $y = -x^4 - 2x^2$.

Câu 11. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



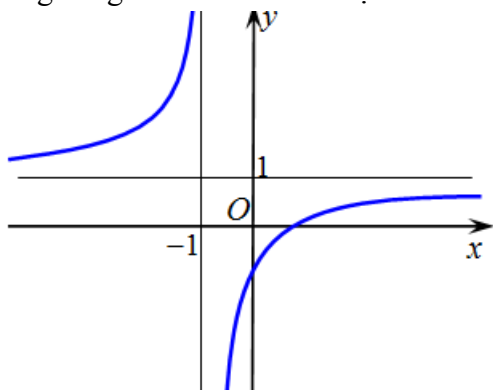
A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 12. Đường cong hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Câu 13. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

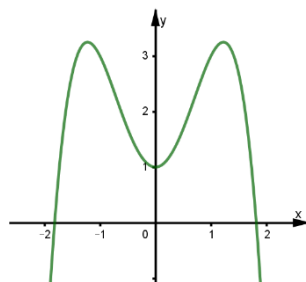
A. $y = \frac{2x-5}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x+2}$.

D. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. $a < 0; b > 0; c > 0$.

B. $a > 0; b < 0; c > 0$.

C. $a < 0; b < 0; c > 0$.

D. $a < 0; b > 0; c < 0$.